VIII. *Manière élémentaire d'obtenir les Suites par lesquelles s'expriment les Quantités exponentielles et les Fonctions trigonométriques des Arcs circulaires. Par M.* Simon L'Huilier, *F. R. S.*

Read February 18, 1796.

L'USAGE des logarithmes, et celui des fonctions trigonométriques des arcs de cercle, tels que sont les sinus, cosinus, tangentes, &c. sont si frequens dans les parties les plus élémentaires des mathématiques, soit pures soit mixtes, qu'on doit regarder ces quantités comme apartenant aux élémens; et que leur calcul doit entrer dans un traité élémentaire.

En s'en tenant à la manière ordinaire de présenter les logarithmes dans les élémens, on fait comprendre la possibilité de leur calcul plutôt qu'on ne peut le développer. Outre celui, la dépendance mutuelle des opérations successives par lesquelles on parvient à un resultat approché, exige dans chacune d'elles une exactitude, qui complique et prolonge le calcul, au point qu'il est bien peu de mathématiciens modernes, qui eussent pour les progrès des sciences le dévouement qu'ont eu l'auteur de cette belle découverte, et ceux qui ont poursuivi et complété ce calcul penible, avant qu'on eût trouvé les voïes directes et indépendantes les unes des autres de parvenir aux mêmes résultats.

Les mêmes difficultés et les mêmes longueurs se présentent dans les calculs des fonctions des arcs circulaires, quand on s'en tient aux voïes élèmentaires développées jusqu'à présent. Le nombre des extractions de racines, et leur dépendance mutuelle, sont telles, qu'elles exigent un travail affraïant, qui devient superflu, quand le calcul de chaque fonction est rendu direct.

Aussi dans le dévelopement de l'une et de l'autre de ces matières, est-on obligé d'abandonner ces voïes longues et penibles; et en profitant des tables heureusement déja calculées, ou a coutume de renvoïer aux calculs supérieurs l'exposition des procédés abbregés et directs par lesquels on parvient aux mêmes résultats. Quelques mathématiciens il est vrai, et en particulier Euler dans son *Introductio*, ont exposé ces derniers procédés d'une manière qui paroît les raprocher des élémens. Mais, si on examine avec quelque soin la marche de ce mathématicien, on trouvera qu'elle est entièrement fondée sur le principe de l'infini; tout au moins trop obscur, pour qu'on puisse regarder comme élémentaires des méthodes auxquelles il sert de base.

J'espère avoir evité ces inconveniens; et avoir rendu l'exposition de la théorie generale des quantités exponentielles, et des fonctions des arcs circulaires, entièrement élémentaire et indépendante de toute idée de l'infini. La liaison intime qui règne entre les procédés par lesquels je calcule l'une et l'autre de ces espèces de fonctions, est remarquable, et propre à éclaircir l'analogie qui règne entr'elles. Cette analogie, il est vrai, est connue depuis longtems des mathématiciens; mais, comme elle a été réduite aux expressions imaginaires d'une de ces espèces de fonctions dans l'autre, elle meritoit d'être présentée d'une manière plus lumineuse.

La méthode que je vais exposer est conforme à celle qu'a emploïée un mathématicien trop modeste et trop peu connu, mon ami M. PFLEIDERER, Professeur à Tubingue, en démontrant le théorème de TAYLOR dans sa dissertation intitulée *Theorematis Tayloriani Demonstratio:* Tubingæ, 1789.

§ 1. *Lemme.* Les différences des puissances des nombres naturels d'un ordre exprimé par l'exposant de ces puissances, est une quantité constante; savoir, le produit continuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à cet exposant; et partant, les différences des mêmes puissances d'un ordre supérieur évanouissent.

Je pourrois regarder cette proposition comme connue. Mais, comme elle est une des principales de ce mémoire, et que sa démonstration est facile, je crois devoir l'exposer en abrégé.

1. Les différences premières des nombres naturels sont égales à l'unité, et les différences suivantes évanouissent.

2. Les différences premières des nombres quarrés, sont $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Donc, les différences secondes des nombres quarrés sont les doubles des différences premières des nombres naturels; et partant 1.2. Et les différences suivantes évanouissent.

3. Les différences premières des cubes, sont $n^3 - (n-1)^3 = 3nn - 3n + 1$. Donc, les différences troisièmes, qui sont les différences secondes des différences premières, sont les triples des différences secondes des nombres quarrés; savoir 1.2.3; et les différences suivantes évanouissent.

En general. Les différences premières des puissances dont l'exposant est m, sont $n^m - (n-1)^m = \frac{m}{1} n^{m-1} - \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2} n^{m-2}$ $+ \frac{m}{1} \ldots \frac{m-2}{3} n^{m-3} \ldots$. Les différences m^{mes} de ces puissances, qui sont les différences $m-1$ des différences premières, sont les différences $m-1^{mes}$ des puissances des nombres naturels dont les exposans sont $m-1$ ou plus petits que $m-1$; affectées de coefficiens constans. Partant, s'il a été prouvé que les différences $m-1^{mes}$ des $m-1^{mes}$ puissances des nombres naturels, sont la quantité constante $1.2.3 \ldots m-1$; et que les différences du même ordre des puissances inférieures évanouissent; on obtient aussi que les différences m^{mes} des m^{mes} puissances, valent m fois le produit $1.2.3 \ldots m-1$; ou sont le produit $1.2.3 \ldots m$; et que les différences des ordres supérieurs évanouissent.

Avis. Pour abréger, je désignerai par $\Delta^p\ (a^m \ldots - . n^m)$ les différences de l'ordre p des puissances m^{mes} des nombres naturels, depuis a jusqu'à n.

Première Partie. Sur les Logarithmes.

§ 2. *Lemme.* Soit une progression géométrique, commençante par l'unité, *p. ex.* Les différences de tous les ordres des termes de cette progression forment aussi une progression géométrique, dont l'exposant est le même que celui de la première, et dont les termes sont les produits des termes de la première progression par la différence des deux premiers termes elevée à une puissance dont l'exposant est égal à l'ordre de cette différence. Soit 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 ..... a^{n-1} une progression géométrique:

La suite des différences premières, est

$$a-1,\ a^2-a,\ a^3-a^2,\ a^4-a^3,\ a^5-a^4 \ldots a^{n-1}-a^{n-2};$$ ou,

$(a-1)\ (1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4, \ldots\ldots a^{n-2}.)$ De-là, la suite des différences secondes, est

$(a-1)^2\ (1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4, \ldots\ldots)$ La suite des differences troisièmes, est

$(a-1)^3\ (1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4, \ldots\ldots)$ La suite des différences quatrièmes, est

$(a-1)^4\ (1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3\quad a^4, \ldots\ldots)$

La suite des differences m^{mes}, est

$(a-1)^m\ (1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4 \ldots\ldots)$

§ 3. *Lemme.* Soit a^z une quantité exponentielle dans laquelle a est plus grande que l'unité. Cette quantité est plus grande que l'unité ou plus petite que l'unité, suivant que z est positif ou négatif; et dans l'un et l'autre cas cette quantité approche de l'unité d'autant plus que z est plus petit: de manière que l'unité est la limite en grandeur ou en petitesse de a^z suivant que z est positif ou négatif.

Corollaire. a^z est une fonction de z de la forme $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$

§ 4. Soit donc proposée la quantité exponentielle a^z à exprimer dans son exposant z;

Soit $a^z=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\ldots$ On aura aussi ...

$$a^{2z}=1+2Az+2^2Bz^2+2^3Cz^3+2^4Dz^4+2^5Ez^5+\ldots$$
$$a^{3z}=1+3Az+3^2Bz^2+3^3Cz^3+3^4Dz^4+3^5Ez^5+\ldots$$
$$a^{4z}=1+4Az+4^2Bz^2+4^3Cz^3+4^4Dz^4+4^5Ez^5+\ldots$$

Soient prises les différences premières ; on aura

$$(a^z - 1)\, a^z = Az + (2^2 - 1)\, Bz^2 + (2^3 - 1)\, Cz^3 + (2^4 - 1)\, Dz^4 + (2^5 - 1)\, Ez^5 + \ldots.$$

$$(a^z - 1)\, a^{2z} = Az + (3^2 - 2^2)\, Bz^2 + (3^3 - 2^3)\, Cz^3 + (3^4 - 2^4)\, Dz^4 + (3^5 - 2^5)\, Ez^5 + \ldots$$

$$(a^z - 1)\, a^{3z} = Az + (4^2 - 3^2)\, Bz^2 + (4^3 - 3^3)\, Cz^3 + (4^4 - 3^4)\, Dz^4 + (4^5 - 3^5)\, Ez^5 + \ldots$$

Or; puisque $a^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots.$

$$a^z - 1 = \quad Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots.$$

Et les premiers termes de tous les premiers membres des équations précédentes sont Az. Mais, les premiers termes de tous les seconds membres des mêmes équations, sont aussi Az. Donc, on a pour ces premiers termes des expressions identiques, desquelles on ne peut rien déterminer pour la valeur de A. Partant, le coefficient A demeure indéterminé.

Soient prises les différences secondes ; on aura

$$(a^z - 1)^2 .\, a^z = \Delta^{ii}\,(3^2 \ldots 1^2)\, Bz^2 + \Delta^{ii}\,(3^3 \ldots 1^3)\, Cz^3 + \Delta^{ii}\,(3^4 \ldots 1^4)\, Dz^4 + \Delta^{ii}\,(3^5 .. 1^5)\, Ez^5 + \ldots$$

$$(a^z - 1)^2\, a^{2z} = \Delta^{ii}\,(4^2 \ldots 2^2)\, Bz^2 + \Delta^{ii}\,(4^3 \ldots 2^3)\, Cz^3 + \Delta^{ii}\,(4^4 .. 2^4)\, Dz^4 + \Delta^{ii}\,(4^5 .. 2^5)\, Ez^5 + \ldots$$

$$(a^z - 1)^2 .\, a^{3z} = \Delta^{ii}\,(5^2 \ldots 3^2)\, Bz^2 + \Delta^{ii}\,(5^3 \ldots 3^3)\, Cz^3 + \Delta^{ii}\,(5^4 \ldots 3^4)\, Dz^4 + \Delta^{ii}\,(5^5 .. 3^5)\, Ez^5 + \ldots$$

Puisque $a^z - 1 = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots\ldots\ldots$; le premier terme de tous les premiers membres des équations précédentes est AAz^2. Mais, le premier terme de tous les seconds membres, est (§ 1) $1.2\ Bz^2$. Donc, égalant les coefficiens des puissances secondes de z, on a $AA = 1.2\ B$; ou, $B = \frac{1}{1 \ldots 2} AA$.

Soient prises les différences troisièmes; on obtient

$$(a^z - 1)^3 a^z = \Delta^{iii}(4^3 \ldots 1^3)\,Cz^3 + \Delta^{iii}(4^4 \ldots 1^4)\,Dz^4 + \Delta^{iii}(4^5 \ldots 1^5)\,Ez^5 + \Delta^{iii}(4^6 \ldots 1^6)\,Fz^6 + \ldots$$

$$(a^z - 1)^3 a^{2z} = \Delta^{iii}(5^3 \ldots 2^3)\,Cz^3 + \Delta^{iii}(5^4 \ldots 2^4)\,Dz^4 + \Delta^{iii}(5^5 \ldots 2^5)\,Ez^5 + \Delta^{iii}(5^6 \ldots 2^6)\,Fz^6 + \ldots$$

$$(a^z - 1)^3 a^{3z} = \Delta^{iii}(6^3 \ldots 3^3)\,Cz^3 + \Delta^{iii}(6^4 \ldots 3^4)\,Dz^4 + \Delta^{iii}(6^5 \ldots 3^5)\,Ez^5 + \Delta^{iii}(6^6 \ldots 3^6)\,Fz^6 + \ldots$$

On montre de même; que, le premier terme des premiers membres de toutes ces équations est $A^3 z^3$; tandis que le premier terme des seconds membres est $1.2.3\,Cz^3$. Donc; $1.2.3\,C = A^3$; et $C = \frac{1}{1.2.3} A^3$.

Soient prises les différences quatrièmes; on obtient

$$(a^z - 1)^4 a^z = \Delta^{iv}(5^4 \ldots 1^4)\,Dz^4 + \Delta^{iv}(5^5 \ldots 1^5)\,Ez^5 + \Delta^{iv}(5^6 \ldots 1^6)\,Fz^6 \ldots$$

$$(a^z - 1)^4 a^{2z} = \Delta^{iv}(6^4 \ldots 2^4)\,Dz^4 + \Delta^{iv}(6^5 \ldots 2^5)\,Ez^5 + \Delta^{iv}(6^6 \ldots 2^6)\,Fz^6 \ldots$$

$$(a^z - 1)^4 a^{3z} = \Delta^{iv}(7^4 \ldots 3^4)\,Dz^4 + \Delta^{iv}(7^5 \ldots 3^5)\,Ez^5 + \Delta^{iv}(7^6 \ldots 3^6)\,Fz^6 \ldots$$

Les premiers termes des premiers membres de ces équations sont $A^4 z^4$. Mais, les premiers termes des seconds membres sont $1.2 \ldots 4Dz^4$. Donc; $1.2 \ldots 4D = A^4$; et $D = \frac{1}{1.2 \ldots 4} A^4$.

On montre de la même manière; en prenant les différences cinquièmes, sixièmes, septièmes . . . . . .
qu'on a les équations .... $A^5 = 1.2 \ldots 5E$; $A^6 = 1.2 \ldots 6F$; $A^7 = 1.2 \ldots 7G$ . . . . . .
et partant; . . . . $E = \frac{1}{1.2 \ldots 5} A^5$; $F = \frac{1}{1.2 \ldots 6} A^6$; $G = \frac{1}{1.2 \ldots 7} A^7$. . . . . . .

On a donc ; $a^z = 1 + Az + \frac{A^2}{1.2} z^2 + \frac{A^3}{1.2.3} z^3 + \frac{A^4}{1.2\ldots4} z^4 + \frac{A^5}{1.2\ldots5} z^5 + \ldots.$

De même ... $a^{-z} = 1 - Az + \frac{A^2}{1.2} z^2 - \frac{A^3}{1.2.3} z^3 + \frac{A^4}{1.2..4} z^4 - \frac{A^5}{1.2\ldots5} z^5 + \ldots..$

De-là ; .... $\frac{a^z + a^{-z}}{2} = 1 + \frac{A^2}{1.2} z^2 + \frac{A^4}{1.2..4} z^4 + \frac{A^6}{1.2..6} z^6 + \ldots.$

$$\frac{a^z - a^{-z}}{2} = Az + \frac{A^3}{1.2.3} z^3 + \frac{A^5}{1.2..5} z^5 + \ldots..$$

Remarque. On parvient donc par un procédé purement élémentaire, fondé sur une proprieté essentielle et première des progressions géométriques (§ 2.), aux suites qu'on a déduites jusqu'à présent des calculs supérieurs, ou du moins, de l'introduction de l'infini.

Il est connu ; que, a est la *base* du système logarithmique ; que A en est le *module*, et faisant $z = 1$, la rélation de a à A, est exprimée par l'équation, $a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2..4} + \ldots.$ Faisant $A = 1$, le système est celui des logarithmes naturels, dont la base est désignée par e. De la dernière suite, on peut exprimer A en a, soit par la méthode du retour des suites ; ou plutôt, par la voïe que je développerai bientôt, après avoir fait sur ce qui précède quelques observations.

§ 5. Soit développé le binome $\left(1 + A\frac{z}{n}\right)^n$. On obtient

$$1 + Az + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2} A^2 \frac{z^2}{n^2} + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}. A^3 \frac{z^3}{n^3} + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-3}{4} A^4 \frac{z^4}{n^4} + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-4}{5} A^5 \frac{z^5}{n^5} + \ldots..$$

$$= 1 + Az + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} A^2 z^2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2}, \frac{1-\frac{2}{n}}{3} A^3 z^3 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2}, \frac{1-\frac{2}{n}}{3},$$
$$\frac{1-\frac{3}{n}}{4} A^4 z^4 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \ldots \frac{1-\frac{4}{n}}{5} A^5 z^5 + \ldots\ldots$$

Plus n augmente, plus les facteurs $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $1-\frac{3}{n}$, $1-\frac{4}{n}\ldots\ldots$ approchent d'être égaux à l'unité; et partant, plus n est grand, plus la suite précédente approche d'être $1 + Az + \frac{A^2}{1.2}z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}z^4 + \frac{A^5}{1.2...5} + \ldots$; de manière que cette suite est la limite du binome $\left(1+\frac{Az}{n}\right)^n$. Donc aussi, la quantité a^z est la limite du binome $\left(1+\frac{Az}{n}\right)^n$; la quantité a^{-z} est la limite du binome $\left(1-\frac{Az}{n}\right)^n$; et les quantités $\frac{a^z \pm a^{-z}}{2}$, sont les limites des quantités $\left(1 + A\frac{z}{n}\right)^n \pm \left(1 - A\frac{z}{n}\right)^n$.

§ 6. Je passe à l'expression de z en a et A.

Puisque $a^z = 1 + Az + \frac{A^2}{1.2}z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}z^4 + \frac{A^5}{1.2...5}z^5 + \ldots.$

Soit $z = n\Delta z$; on aura aussi,

$$a^{\Delta z} = 1 + A\Delta z + \frac{A^2}{1.2}\Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}\Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}\Delta z^4 + \frac{A^5}{1.2..5}\Delta z^5 + \ldots.$$

et $a^z = a^{n\Delta z} = (a^{\Delta z})^n = \left(1 + A\Delta z + \frac{A^2}{1.2}\Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}\Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}\Delta z^4 + \frac{A^5}{1.2..5}\Delta z^5 + \ldots\right)^n. = 1 + v.$

De-là; $\left(A\Delta z + \frac{A^2}{1.2}\Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}\Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}\Delta z^4 + \frac{A^5}{1.2..5}\Delta z^5 + \ldots.\right) = (1+v)^{\frac{1}{n}} - 1,$

et $An\Delta z\ (1 + \frac{A}{1.2}\ \Delta z + \frac{A^2}{1.2.3}\ \Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2..4}\ \Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..5}$

$\Delta z^4 + \ldots) = n \left((1+v)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

$$= \left(v - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} v^2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3} v^3 - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3}.\frac{3-\frac{1}{n}}{4} v^4 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} \ldots \frac{4-\frac{1}{n}}{5} v^5 - \ldots.\right)$$

Or, (par supp.) n log. $(1 + A\Delta z + \frac{A^2}{1.2}\ \Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}.\ \Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}\ \Delta z^4 + \frac{A^5}{1.2...5}\ \Delta z^5 + \ldots) =$ log. $(1+v)$

ou, n log. $a^{\Delta z} =$ log. $(1+v)$; et $n\Delta z$ log. $a =$ log. $1+v$; ou, faisant a la base du systéme, et partant log. $a = 1$,

A log. $(1+v)\ (1 + \frac{A}{1.2}\Delta z + \frac{A^2}{1.2.3}\Delta z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}\ \Delta z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}$

$\Delta z^4 + \frac{A^5}{1.2..5}\ \Delta z^5 + \ldots.)$

$$= v - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} v^2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3} v^3 - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3}.\frac{3-\frac{1}{n}}{4} v^4 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3} \ldots. \frac{4-\frac{1}{n}}{5} v^5 - \ldots..$$

$$= v - \frac{1-\frac{\Delta z}{z}}{1.2} v^2 + \frac{1-\frac{\Delta z}{z}}{1.2}.\frac{2-\frac{\Delta z}{z}}{3} v^3 - \frac{1-\frac{\Delta z}{z}}{1.2} \ldots \frac{3-\frac{\Delta z}{z}}{4} v^4 + \frac{1-\frac{\Delta z}{z}}{1.2} \ldots \frac{4-\frac{\Delta z}{z}}{5} v^5 - \ldots...$$

Cette équation aïant toujours lieu; elle a lieu en particulier entre les limites de ses membres; qui

sont A log. $(1+v)$; et $v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 - \ldots..$

donc; A log. $(1+v) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 - \ldots..$

A log. $1 - v = - v - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{5}v^5 - \ldots..$

A log. $\frac{1+v}{1-v} = 2\ (v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \ldots..)$

A log. $\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \ldots.$

Soit $1 + v = a$; la base du système

$$A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \tfrac{1}{5}(a-1)^5 - \ldots\ldots$$

$$= \frac{aa-1}{aa+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{aa-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{aa-1}{aa+1}\right)^5 + \ldots\ldots \text{ en faisant } \frac{1+v}{1-v} = aa.$$

Ce qui est la rélation par laquelle le module est determiné dans la base.

§ 7. Je ne m'arrête pas aux conséquences qui découlent de ces formules connues; mon seul but étant de montrer comment on peut les obtenir par les élémens. Je donnerai pour exemple de leur utilité, la facilité avec laquelle on obtient l'équation différentielle logarithmique; de laquelle réciproquement on a déduit le calcul des logarithmes.

Puisque $a^z = 1 + Az + \frac{A^2}{1.2}z^2 + \frac{A^3}{1.2.3}z^3 + \frac{A^4}{1.2..4}z^4 + \frac{A^5}{1.2..5}z^5 + \ldots\ldots$

$$\frac{d.a^z}{dz} = A\left(1 + Az + \frac{A^2}{1.2}z^2 + \frac{A^3}{1.2..3}z^3 + \frac{A^4}{1\ldots4}z^4 + \ldots\right) = A.a^z.$$

de-là; $\frac{d^2.a^z}{dz^2} = A^2 a^z$

$$\frac{d^3 a^z}{dz^3} = A^3 a^z$$

$$\frac{d^4 a^z}{dz^4} = A^4 . a^z$$

Réciproquement. Puisque $A \log. 1 + v = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 - \ldots\ldots$

$$A\,\frac{d.\log. 1+v}{dv} = 1 - v + v^2 - v^3 + v^4 - \ldots\ldots = \frac{1}{1+v}.$$

SECONDE PARTIE. SUR LES SINUS, COSINUS, ET TANGENTES, DES ARCS DE CERCLE.

§ 8. *Lemmes connus.* 1. La différence des sinus de deux arcs est égale au double produit du cosinus de leur demi-somme par le sinus de leur demi-différence.

2. La différence du cosinus de deux arcs est égale au double produit du sinus de leur demi-somme et de leur demi-différence.

Symboliquement. 1. $\text{Sin. } a - \text{sin. } b = 2 \cos. \frac{a+b}{2} \text{ sin. } \frac{a-b}{2}$.

2. $\text{Cos. } b - \cos. a = 2 \text{ sin. } \frac{a+b}{2} \text{ sin. } \frac{a-b}{2}$.

§ 9. Soient: Sin. a, sin. $2a$, sin. $3a$, sin. $4a$, sin. $5a$, sin. $6a$, ... les sinus d'arcs en progression arithmétique, croissant, *p. ex.* comme les nombres naturels. Soient prises les différences des ordres successifs de ces sinus; on obtient

Différences du premier ordre . $- 2 \text{ sin. } \frac{1}{2} a \left(\cos. \frac{3}{2} a, \cos. \frac{5}{2} a, \cos. \frac{7}{2} a, \cos. \frac{9}{2} a, \cos. \frac{11}{2} a, \cos. \frac{13}{2} a \ldots . \right)$

Différences du second ordre . . $- 2^2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2} a \left(\text{sin. } 2a, \text{sin. } 3a, \text{sin. } 4a, \text{sin. } 5a, \text{sin. } 6a, \text{sin. } 7a \ldots . . \right)$

Différences du troisième ordre . $- 2^3 \text{sin.}^3 \frac{1}{2} a \left(\cos. \frac{5}{2} a, \cos. \frac{7}{2} a, \cos. \frac{9}{2} a, \cos. \frac{11}{2} a, \cos. \frac{13}{2} a, \cos. \frac{15}{2} a \ldots . . \right)$

Différences du quatrième ordre . . $+ 2^4 \text{sin}^4 \frac{1}{2} a \left(\text{sin. } 3a, \text{sin. } 4a, \text{sin. } 5a, \text{sin. } 6a, \text{sin. } 7a, \text{sin. } 8a \ldots . . \right)$

Différences du cinquième ordre . . $+ 2^5 \text{ sin.}^5 \frac{1}{2} a \left(\cos. \frac{7}{2} a, \cos. \frac{9}{2} a, \cos. \frac{11}{2} a, \cos. \frac{13}{2} a, \cos. \frac{15}{2} a, \cos. \frac{17}{2} a \ldots . . \right)$

Différences du sixième ordre . . $- 2^6 \text{ sin.}^6 \frac{1}{2} a \left(\text{sin. } 4a, \text{sin. } 5a, \text{sin. } 6a, \text{sin. } 7a, \text{sin. } 8a, \text{sin. } 9a \ldots . \right)$

En général,

Différences du $2m^{me}$ ordre . . . $\pm 2^{2m} \sin.^{2m} \frac{1}{2} a$ ($\sin. \overline{m+1}.a$, $\sin. \overline{m+2}.a$, $\sin. \overline{m+3}.a$, $\sin. \overline{m+4}.a$, ...)

Différences du $2m+1^{me}$ ordre . . $\pm 2^{2m+1} \sin.^{2m+1} \frac{1}{2} a$ ($\cos. \frac{2m+3}{2} a$, $\cos. \frac{2m+5}{2} a$, $\cos. \frac{2m+7}{2} a$, $\cos. \frac{2m+9}{2} a$, ...)

§ 10. De même; soient $\cos. a$, $\cos. 2a$, $\cos. 3a$, $\cos. 4a$, $\cos. 5a$, $\cos. 6a$, ... les cosinus d'arcs en progression arithmétique croissant, *p. ex.* comme les nombres naturels. Soient prises les différences des ordres successifs de ces cosinus; on obtient

Différences du premier ordre . . $-2 \sin. \frac{1}{2} a$ ($\sin. \frac{3}{2} a$, $\sin. \frac{5}{2} a$, $\sin. \frac{7}{2} a$, $\sin. \frac{9}{2} a$, $\sin. \frac{11}{2} a$, $\sin. \frac{13}{2} a$ . . .)

Différences du second ordre . . $-2^2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$ ($\cos. 2a$, $\cos. 3a$, $\cos. 4a$, $\cos. 5a$, $\cos. 6a$, $\cos. 7a$ . . . .)

Différences du troisième ordre . . . $+ 2^3 \sin.^3 \frac{1}{2} a$ ($\sin. \frac{5}{2} a$, $\sin. \frac{7}{2} a$, $\sin. \frac{9}{2} a$, $\sin. \frac{11}{2} a$, $\sin. \frac{13}{2} a$, $\sin. \frac{15}{2} a$ . . .)

Différences du quatrième ordre . . . $+ 2^4 \sin.^4 \frac{1}{2} a$ ($\cos. 3a$, $\cos. 4a$, $\cos. 5a$, $\cos. 6a$, $\cos. 7a$, $\cos. 8a$, ...)

Différences du cinquième ordre . . . $- 2^5 \sin.^5 \frac{1}{2} a$ ($\sin. \frac{7}{2} a$, $\sin. \frac{9}{2} a$, $\sin. \frac{11}{2} a$, $\sin. \frac{13}{2} a$, $\sin. \frac{15}{2} a$, $\sin. \frac{17}{2} a$ . . . . .)

Différences du sixième ordre . . . $- 2^6 \sin.^6 \frac{1}{2} a$ ($\cos. 4a$, $\cos. 5a$, $\cos. 6a$, $\cos. 7a$, $\cos. 8a$, $\cos. 9a$ . . . . .)

En général,

Différences du $2m^{me}$ ordre . . . . . $\pm 2^{2m} \sin.^{2m} \frac{1}{2} a$ ($\cos. \overline{m+1}.a$, $\cos. \overline{m+2}.a$, $\cos. \overline{m+3}.a$, $\cos. \overline{m+4}.a$, $\cos. \overline{m+5}.a$ . . . . .)

Différences du $2m+1^{me}$ ordre . . . . $\pm 2^{2m+1} \sin.^{2m+1} \frac{1}{2} a$ ($\sin. \frac{2m+3}{2} a$, $\sin. \frac{2m+5}{2} a$, $\sin. \frac{2m+7}{2} a$, $\sin. \frac{2m+9}{2} a$, $\sin. \frac{2m+11}{2} a$ . . .)

Remarque. En omettant le facteur $2^m \sin.^m \frac{1}{2} a$; ces suites (de même que la suite fondamentale) reviennent sur elles mêmes, ou sont toujours différentes, suivant que a est commensurable ou non avec la circonférence. Ces suites sont aussi celles des sinus ou cosinus d'arcs qui suivent la progression arithmétique des nombres naturels; seulement, avec une origine différente.

§ 11. Comme sin. z est zéro, lorsque z est zéro; et qu'outre celui le rapport d'égalité est la limite du rapport d'un arc à son sinus; et que le sinus est plus petit que l'arc; sin. z est une fonction de z de la forme, $z - Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + Dz^5 + \ldots\ldots$ Et comme le cosinus d'un arc est l'unité, lorsque z est zéro; cos. z est une fonction de z de la forme $1 - Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots\ldots$

§ 12. Soit donc; $\sin. z = z - Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + Dz^5 + Ez^6 + \ldots\ldots$

On aura aussi, $\sin. 2z = 2z - 2^2Az^2 + 2^3Bz^3 + 2^4Cz^4 + 2^5Dz^5 + 2^6Ez^6 + \ldots\ldots$

$$\sin. 3z = 3z - 3^2Az^2 + 3^3Bz^3 + 3^4Cz^4 + 3^5Dz^5 + 3^6Ez^6 + \ldots$$

$$\sin. 4z = 4z - 4^2Az^2 + 4^3Bz^3 + 4^4Cz^4 + 4^5Dz^5 + 4^6Ez^6 + \ldots$$

Soient prises les différences premières; on obtient

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{3}{2} z = z - (2^2 - 1^2) Az^2 + (2^3 - 1^3) Bz^3 + (2^4 - 1^4) Cz^4 + (2^5 - 1^5) Dz^5 + \ldots$$

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{5}{2} z = z - (3^2 - 2^2) Az^2 + (3^3 - 2^3) Bz^3 + (3^4 - 2^4) Cz^4 + (3^5 - 2^5) Dz^5 + \ldots$$

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{7}{2} z = z - (4^2 - 3^2) Az^2 + (4^3 - 3^3) Bz^3 + (4^4 - 3^4) Cz^4 + (4^5 - 3^5) Dz^5 + \ldots$$

Réduisant en suites les facteurs du premier membre (§ 11), et exécutant les multiplications; les premiers termes des produits sont $1z$; et le premier terme de chaque second membre est aussi $1z$; partant, nous apprenons seulement que le premier terme de l'expression du sinus est bien $1z$.

Soient prises les différences secondes; on obtient

$$-2^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} z \sin. 2z = -\Delta^{ii}(3^2..1^2)Az^2 + \Delta^{ii}(3^3..1^3)Bz^3 + \Delta^{ii}(3^4...1^4)Cz^4 + \Delta^{ii}(3^5...1^5)Dz^5 + ..$$

$$-2^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} z \sin. 3z = -\Delta^{ii}(4^2...2^2)Az^2 + \Delta^{ii}(4^3...2^3)Bz^3 + \Delta^{ii}(4^4...2^4)Cz^4 + \Delta^{ii}(4^5...2^5)Dz^5 + ..$$

$$-2^2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} z \sin. 4z = -\Delta^{ii}(5^2...3^2)Az^2 + \Delta^{ii}(5^3..3^3)Bz^3 + \Delta^{ii}(5^4...3^4)Cz^4 + \Delta^{ii}(5^5...3^5)Dz^5 + ...$$

Or; le premier terme de chaque premier membre développé en suite conformement aux expressions du § 11^{me} est z^3; et les premiers membres ne contiennent pas les secondes puissances de z; tandis que le coefficient du premier terme Az^2 des seconds membres, qui est la différence seconde des quarrés des nombres naturels, n'évanouit pas. Donc; dans les seconds membres, le coefficient A de z^2 est zéro.

On démontre de la même manière; que, dans la suite, $\sin. z = z - Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + Dz^5 + Ez^6 + \ldots$, les coefficiens de toutes les puissances à exposans pairs évanouissent. Savoir; aïant pris les différences de l'ordre pair $2m$ qui sont $\pm z^{2m} \sin. z^{2m} \frac{1}{2} z \sin. pz$ (§ 10.); le premier terme du produit des facteurs développés en suites, contient la puissance impaire de z, z^{2m+1}; de manière que dans ces produits, la puissance paire z^{2m} manque; donc, elle doit aussi manquer dans les seconds membres: or, le premier terme de chaque second membre contient la puissance paire z^{2m}, avec deux facteurs dont l'un $\Delta^{2m} n^{2m}$ est la quantité constante $1.2 \ldots 2m$ (§ 1.) et partant n'évanouit pas ; donc, l'autre facteur de cette puissance évanouit. Partant ; le sinus d'un arc est une fonction de cet arc, de la forme $\sin. z = z - Az^3 + Bz^5 + Cz^7 + Dz^9 + \ldots\ldots$ qui ne contient que les puissances impaires de z.

On a donc ;
$$\begin{aligned}\sin. z &= z - Az^3 + Bz^5 + Cz^7 + Dz^9 + \ldots\\ \sin. 2z &= 2z - 2^3Az^3 + 2^5Bz^5 + 2^7Cz^7 + 2^9Dz^9 + \ldots\\ \sin. 3z &= 3z - 3^3Az^3 + 3^5Bz^5 + 3^7Cz^7 + 3^9Dz^9 + \ldots\\ \sin. 4z &= 4z - 4^3Az^3 + 4^5Bz^5 + 4^7Cz^7 + 4^9Dz^9 + \ldots\end{aligned}$$

Soient prises les différences troisièmes ; on obtient

$$- 2^3 \sin.^3 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{5}{2} z = - \Delta^{iii} (4^3 \ldots 1^3)\, Az^3 + \Delta^{iii} (4^5 \ldots 1^5)\, Bz^5 + \Delta^{iii} (4^7 \ldots 1^7)\, C^7 + \Delta^{iii} (4^9 \ldots 1^9)\, Dz^9 + \ldots$$

$$- 2^3 \sin.^3 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{7}{2} z = - \Delta^{iii} (5^3 \ldots 2^3)\, Az^3 + \Delta^{iii} (5^5 \ldots 2^5)\, Bz^5 + \Delta^{iii} (5^7 \ldots 2^7)\, Cz^7 + \Delta^{iii} (5^9 \ldots 2^9)\, Dz^9 + \ldots$$

$$- 2^3 \sin.^3 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{9}{2} z = - \Delta^{iii} (6^3 \ldots 3^3)\, Az^3 + \Delta^{iii} (6^5 \ldots 2^5)\, Bz^5 + \Delta^{iii} (6^7 \ldots 3^7)\, Cz^7 + \Delta^{iii} (6^9 \ldots 3^9)\, Dz^9 + \ldots$$

Réduisant en suites les facteurs des premiers membres conformement au § 11 ; les premiers termes de ces membres sont $- z^3$; et les premiers termes des seconds membres sont (§ 1.) $- 1.2.3\, A^3$. Donc ; $1 = 1.2.3\, A$; et $A = \frac{1}{1.2.3}$.

Prenant successivement les différences quatrièmes et cinquièmes, on obtient

$$2^5 \sin.^5 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{7}{2} z = \Delta^{v} (6^5 \ldots 1^5)\, Bz^5 + \Delta^{v} (6^7 \ldots 1^7)\, Cz^7 + \Delta^{v} (6^9 \ldots 1^9)\, Dz^9 + \ldots$$

$$2^5 \sin.^5 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{9}{2} z = \Delta^{v} (7^5 \ldots 2^5)\, Bz^5 + \Delta^{v} (7^7 \ldots 2^7)\, Cz^7 + \Delta^{v} (7^9 \ldots 2^9)\, Dz^9 + \ldots$$

$$2^5 \sin.^5 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{11}{2} z = \Delta^{v} (8^5 \ldots 3^5)\, Bz^5 + \Delta^{v} (8^7 \ldots 3^7)\, Cz^7 + \Delta^{v} (8^9 \ldots 3^9)\, Dz^9 + \ldots$$

Réduisant en suites les facteurs des premiers membres (§ 11.) ; les premiers termes de ces membres sont z^5 ; et les premiers termes des seconds membres sont $1.2 \ldots 5Bz^5$. (§ 1.). Donc; $1 = 1.2 \ldots 5B$; et $B = \frac{1}{1.2 \ldots 5}$.

Prenant de même successivement les différences sixièmes et septièmes; on obtient

$$- 2^7 \sin.^7 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{9}{2} z = \Delta^{vii} (8^7 \ldots 1^7)\, Cz^7 + \Delta^{vii} (8^9 \ldots 1^9)\, Dz^9 + \Delta^{vii} (8^{11} \ldots 1^{11})\, Ez^{11} + \ldots$$

$$- 2^7 \sin.^7 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{11}{2} z = \Delta^{vii} (9^7 \ldots 2^7)\, Cz^7 + \Delta^{vii} (9^9 \ldots 2^9)\, Dz^9 + \Delta^{vii} (9^{11} \ldots 2^{11})\, Ez^{11} + \ldots$$

$$- 2^7 \sin.^7 \tfrac{1}{2} z \cos. \tfrac{13}{2} z = \Delta^{vii} (10^7 \ldots 3^7)\, Cz^7 + \Delta^{vii} (10^9 \ldots 3^9)\, Dz^9 + \Delta^{vii} (10^{11} \ldots 3^{11})\, Ez^{11} + \ldots$$

Réduisant en suites les facteurs des premiers membres; le premier terme de ces membres est z^7; et les premiers termes des seconds membres sont $1.2 \ldots 7Cz^7$. Donc; $C = - \frac{1}{1.2 \ldots 7}$.

Prenant de même les différences huitièmes et neuvièmes; on obtient, par les mêmes raisonnemens;

$D = + \frac{1}{1.2 \ldots 9}$; puis $E = - \frac{1}{1.2 \ldots 11}$; $F = + \frac{1}{1.2 \ldots 13} \ldots \ldots \ldots$

Donc, enfin; $\sin. z = z - \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1.2 \ldots 5} z^5 - \frac{1}{1.2 \ldots 7} z^7 + \frac{1}{1.2 \ldots 9} z^9 - \ldots \ldots \ldots$

§ 13. La recherche des cosinus se fait de la même manière.

Soit $\cos. z = 1 - Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots$

et partant, $\cos. 2z = 1 - 2Az + 2^2 Bz^2 + 2^3 Cz^3 + 2^4 Dz^4 + 2^5 Ez^5 + \ldots$

$\cos. 3z = 1 - 3Az + 3^2 Bz^2 + 3^3 Cz^3 + 3^4 Dz^4 + 3^5 Ez^5 + \ldots$

$\cos. 4z = 1 - 4Az + 4^2 Bz^2 + 4^3 Cz^3 + 4^4 Dz^4 + 4^5 Ez^5 + \ldots$

Soient prises les différences premières ; on obtient

$$-2\sin.\tfrac{1}{2}z\sin.\tfrac{3}{2}z = -Az + (2^2-1^2)Bz^2 + (2^3-1^3)Cz^3 + (2^4-1^4)Dz^4 + \ldots$$

$$-2\sin.\tfrac{1}{2}z\sin.\tfrac{5}{2}z = -Az + (3^2-2^2)Bz^2 + (3^3-2^3)Cz^3 + (3^4-2^4)Dz^4 + \ldots$$

$$-2\sin.\tfrac{1}{2}z\sin.\tfrac{7}{2}z = -Az + (4^2-3^2)Bz^2 + (4^3-3^3)Cz^3 + (4^4-3^4)Dz^4 + \ldots$$

Développant en suites les facteurs des premiers membres ; les premiers termes de ces membres contiennent les secondes puissances z^2 de z ; et ces membres ne contiennent pas la première puissance de z. Donc ; dans les seconds membres, la seconde puissance de z doit aussi manquer ; donc, $A = 0$. On montre de la même manière, et conformement à ce qui est développé dans le § 12 ; que les puissances de z à exposans impairs manquent dans l'expression du cos. z ; de sorte que, le cosinus est une fonction de z de la forme ;

$$\cos.\ z = 1 - Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots.$$

et partant, $\cos.\ 2z = 1 - 2^2Az^2 + 2^4Bz^4 + 2^6Cz^6 + 2^8Dz^8 + \ldots.$

$$\cos.\ 3z = 1 - 3^2Az^2 + 3^4Bz^4 + 3^6Cz^6 + 3^8Dz^8 + \ldots.$$

$$\cos.\ 4z = 1 - 4^4Az^2 + 4^4Bz^4 + 4^6Cz^6 + 4^8Dz^8 + \ldots.$$

Soient prises les différences secondes ; on obtient

$$-2^2\sin.^2\tfrac{1}{2}z\cos.\ 2z = -\Delta^{ii}(3^2\ldots.1^2)Az^2 + \Delta^{ii}(3^4\ldots1^4)Bz^4 + \Delta^{ii}(3^6\ldots1^6)Cz^6 + \Delta^{ii}(3^8\ldots,1^8)Dz^8\ldots.$$

$$-2^2\sin.^2\tfrac{1}{2}z\cos.\ 3z = -\Delta^{ii}(4^2\ldots2^2)Az^2 + \Delta^{ii}(4^4\ldots2^4)Bz^4 + \Delta^{ii}(4^6\ldots2^6)Cz^6 + \Delta^{ii}(4^8\ldots2^8)Dz^8\ldots.$$

$$-2^2\sin.^2\tfrac{1}{2}z\cos.\ 4z = -\Delta^{ii}(5^2\ldots3^2)Az^2 + \Delta^{ii}(5^4\ldots3^4)Bz^4 + \Delta^{ii}(5^6\ldots3^6)Cz^6 + \Delta^{ii}(5^8\ldots3^8)Dz^8\ldots..$$

Réduisant en suites les premiers membres de toutes ces équations ; leur premier terme est $-z^2$. Mais, le premier terme des seconds membres est $-1.2.Az^2$. Donc; $1=1.2.A$; et $A=\frac{1}{1.2}$.

Prenant successivement les différences troisièmes et quatrièmes; on obtient

$$2^4\sin.^4\tfrac{1}{2}z\cos.3z=\Delta^{iv}(4^4\ldots1^4)Bz^4+\Delta^{iv}(4^6\ldots1^6)Cz^6+\Delta^{iv}(4^8\ldots1^8)Dz^8+\Delta^{iv}(4^{10}\ldots1^{10})Ez^{10}\ldots.$$

$$2^4\sin.^4\tfrac{1}{2}z\cos.4z=\Delta^{iv}(5^4\ldots2^4)Bz^4+\Delta^{iv}(5^6\ldots2^6)Cz^6+\Delta^{iv}(5^8\ldots2^8)Dz^8+\Delta^{iv}(5^{10}\ldots2^{10})Ez^{10}\ldots$$

$$2^4\sin.^4\tfrac{1}{2}z\cos.5z=\Delta^{iv}(6^4\ldots3^4)Bz^4+\Delta^{iv}(6^6\ldots3^6)Cz^6+\Delta^{iv}(6^8\ldots3^8)Dz^8+\Delta^{iv}(6^{10}\ldots3^{10})Ez^{10}\ldots$$

D'où l'on a de même; $1.=1.2\ldots4B$; et $B=\frac{1}{1.2\ldots4}$.

Soient prises successivement les différences cinquièmes et sixièmes; on obtient

$$-2^6\sin.^6\tfrac{1}{2}z\cos.4z=\Delta^{vi}(6^6\ldots.1^6)Cz^6+\Delta^{vi}(6^8\ldots.1^8)Dz^8+\Delta^{vi}(6^{10}\ldots.1^{10})Ez^{10}+\ldots$$

$$-2^6\sin.^6\tfrac{1}{2}z\cos.5z=\Delta^{vi}(7^6\ldots2^6)Cz^6+\Delta^{vi}(7^8\ldots2^8)Dz^8+\Delta^{vi}(7^{10}\ldots.2^{10})Ez^{10}+\ldots$$

$$-2^6\sin^6\tfrac{1}{2}z\cos.6z=\Delta^{vi}(8^6\ldots3^6)Cz^6+\Delta^{vi}(8^8\ldots3^8)Dz^8+\Delta^{vi}(8^{10}\ldots.3^{10})Ez^{10}+\ldots.$$

D'où l'on obtient $-1=1.2\ldots6C$; et $C=-\frac{1}{1.2\ldots6}$.

On obtient successivement .... $D=+\frac{1}{1.2\ldots8}$.

$E=-\frac{1}{1.2\ldots10}$.

Et partant; $\cos.z=1-\frac{1}{1.2}z^2+\frac{1}{1.2..4}z^4-\frac{1}{1.2\ldots6}z^6+\frac{1}{1.2\ldots8}z^8-\frac{1}{1.2\ldots10}z^{10}+\ldots\ldots$

§ 14. Puisque $\sin.z=z-\frac{1}{1.2.3}z^3+\frac{1}{1.2\ldots5}z^5-\frac{1}{1.2\ldots7}z^7+\frac{1}{1.2..9}z^9-\ldots\ldots$

et $\cos.z=1-\frac{1}{1.2}z^2+\frac{1}{1.2..4}z^4-\frac{1}{1.2\ldots6}z^6+\frac{1}{1.2\ldots8}z^8-\ldots$

$$\text{tang.}\, z \left(=\frac{\sin. z}{\cos. z}\right) = z \times \frac{1-\frac{1}{1.2.3}z^2+\frac{1}{1.2..5}z^4-\frac{1}{1.2..7}z^6+\frac{1}{1.2...9}z^8-\ldots\ldots}{1-\frac{1}{1.2}z^2+\frac{1}{1.2..4}z^4-\frac{1}{1.2..6}z^6+\frac{1}{1.2..8}z^8-\ldots\ldots}$$

§ 15. Après avoir exprimé le sinus, le cosinus, et la tangente d'un arc, dans cet arc ; on pourroit réciproquement par la méthode du retour des suites, exprimer l'arc dans ces fonctions de lui-même. La méthode suivante est plus élémentaire ; et plus conforme au procédé que j'ai suivi jusqu'à présent.

Il est connu ; que, $\cos. nz = \frac{(\cos. z+\sin. z\sqrt{-1})^n+(\cos. z-\sin. z\sqrt{-1})^n}{2}$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z+\sin. z\sqrt{-1})^n-(\cos. z-\sin. z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

De-là ; $\cos. nz + \sin. nz\sqrt{-1} = (\cos. z + \sin. z\sqrt{-1})^n$;

$$(\cos. nz + \sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos. z + \sin. z\sqrt{-1}$$

$$\cos. nz - \sin. nz\sqrt{-1} = (\cos. z - \sin. z\sqrt{-1})^n ;$$

$$(\cos. nz - \sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos. z - \sin. z\sqrt{-1}$$

Partant ; $\cos. z = \frac{(\cos. nz+\sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}+(\cos. nz-\sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2}$.

$$\sin. z = \frac{(\cos. nz+\sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}-(\cos. nz-\sin. nz\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2\sqrt{-1}}.$$

De-là ; $n\sin. z = \cos. nz^{\frac{1}{n}} \times (\text{tang.}\, nz$
$$-\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3}\text{tang.}^3 nz$$
$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{4-\frac{1}{n}}{5}\text{tang.}^5 nz$$
$$-\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{6-\frac{1}{n}}{7}\text{tang.}^7 nz$$
$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{8-\frac{1}{n}}{9}\text{tang.}^9 nz$$
$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots$

Partant aussi ; $n\sin. \frac{1}{n}z = \cos. z^{\frac{1}{n}}$ $(\text{tang.}\, z$
$$-\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{2-\frac{1}{n}}{3}\text{tang.}^3 z$$
$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{4-\frac{1}{n}}{5}\text{tang.}^5 z$$
$$-\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{6-\frac{1}{n}}{7}\text{tang.}^7 z$$
$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}\ldots\frac{8-\frac{1}{n}}{9}\text{tang.}^9 z$$
$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc aussi ; les limites des deux membres de cette équation sont égales entr'elles. Mais, en augmentant n, les limites sont z, et tang. $z - \frac{1}{3}$ tang. $^3z + \frac{1}{5}$ tang. $^5z - \frac{1}{7}$ tang. $^7z + \frac{1}{9}$ tang. ^9z — . . . . . .

Donc ; $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \ldots\ldots$ (faisant t = tang. z).

Remarque. Je m'exprime dans ce mémoire d'une manière fort concise sur le passage des quantités variables susceptibles de limites à leurs limites. Je suppose connu que cette théorie peut être dégagée de toute idée de l'infini ; et rappellée à la méthode rigoureuse des anciens connue sous le nom de *Méthode d'Exhaustion.* D'après NEWTON, MACLAURIN, ROBINS, et autres auteurs, j'ai taché de mettre cette théorie à l'abri de toute contestation, dans ma Prix sur l'Infini Mathématique, couronnée par l'Académie de Berlin en 1786. J'espère l'avoir fait de la manière la plus satisfaisante dans l'ouvrage qui s'imprime dans ce moment sous le titre : *Principiorum Calculi differentialis et integralis Expositio elementaris.*

§ 16. Des formules précédentes, on déduit aisément les formules différentielles des fonctions trigonométriques des arcs de cercle.

Puisque sin. $z = z - \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1.2..5}z^5 - \frac{1}{1.2...7}z^7 + \frac{1}{1.2...9}z^9 - \ldots\ldots$

$$\frac{d.\sin.z}{dz} = 1 - \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2..4}z^4 - \frac{1}{1.2..6}z^6 + \frac{1}{1.2...8}z^8 - \ldots\ldots = \cos.\ z.$$

Puisque cos. $z = 1 - \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2..4}z^4 - \frac{1}{1.2..6}z^6 + \frac{1}{1.2..8}z^8 - \ldots\ldots$

$$\frac{d.\cos.z}{dz} = -z + \frac{1}{1.2.3}z^3 - \frac{1}{1.2..5}z^5 + \frac{1}{1.2...7}z^7 - \ldots\ldots = -\sin.z.$$

Puisque tang. $z = \frac{\sin.z}{\cos.z}$; $\frac{d.\,\text{tang}.z}{dz} = \frac{\cos.z\,\frac{d.\sin.z}{dz} - \sin.z.\,\frac{d.\cos.z}{dz}}{\cos.^2 z}$
$= \frac{\cos.^2 z + \sin.^2 z}{\cos.^2 z} = \frac{1}{\cos.^2 z} = \sec.^2 z.$

C'est ce qu'on pourroit tirer de l'expression
$z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$;
$\frac{dz}{dt} = 1 - tt + t^4 - t^6 + t^8 - \ldots = \frac{1}{1+tt} = \frac{1}{\sec.^2 t}$; et partant $\frac{dt}{dz} = \sec.^2 t.$

De-là encore, on déduit les rapports différentiels de tous les ordres successifs.

Savoir; $\frac{d.\sin.z}{dz} = \cos.z$ $\qquad$ $\frac{d.\cos.z}{dz} = -\sin.z$

$\frac{d^2\sin.z}{dz^2} = -\sin.z$ $\qquad$ $\frac{d^2\cos.z}{dz^2} = -\cos.z$

$\frac{d^3\sin.z}{dz^3} = -\cos.z$ $\qquad$ $\frac{d^3\cos.z}{dz^3} = +\sin.z$

$\frac{d^4\sin.z}{dz^4} = +\sin.z$ $\qquad$ $\frac{d^4\cos.z}{dz^4} = +\cos.z$

$\frac{d^5\sin.z}{dz^5} = +\cos.z$ $\qquad$ $\frac{d^5\cos.z}{dz^5} = -\sin.z$

Troisième Partie. Sur l'Analogie entre les Logarithmes et les Fonctions trigonométriques des Arcs circulaires.

§ 17. La ressemblance qui règne entre le procédé par lequel j'ai obtenu les expressions des quantités exponentielles dans leurs exposans, et celui par lequel j'ai obtenu les expressions du sinus et du cosinus d'un arc dans cet arc, me paroît expliquer de la manière la plus lumineuse l'analogie observée depuis longtems entre les quantités exponentielles et ces fonctions circulaires; et rendre raison de la conformité des résultats de ces procédés.

Par le § 4. $\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2..4} z^4 + \frac{1}{1.2...6} z^6 + \frac{1}{1.2...8} z^8 + \frac{1}{1.2...10} z^{10} + \ldots.$

Et (§ 13.) $\cos. z = 1 - \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2..4} z^4 - \frac{1}{1.2...6} z^6 + \frac{1}{1.2...8} z^8 - \frac{1}{1.2...10} z^{10} + \ldots$

Ces expressions diffèrent seulement par les signes des termes alternatifs, qui contiennent des puissances impairement paires de z; partant, si dans la première on change le signe de zz, en substitant $-zz$ à zz, ou $z\sqrt{-1}$ à z, on obtiendra la seconde; d'où l'on a été appellé à présenter cos. z sous la forme exponentielle imaginaire, $\cos. z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

De même (§ 4.); $\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{1}{1.2..3} z^3 + \frac{1}{1.2..5} z^5 + \frac{1}{1.2...7} z^7 + \frac{1}{1.2...9} z^9 + \ldots.$

Et $\sin. z = z - \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1.2...5} z^5 - \frac{1}{1.2...7} z^7 + \frac{1}{1.2..9} z^9 - \ldots.$

Si dans le second membre de la première équation on substitue $z\sqrt{-1}$ à z; et si on divise le résultat par $\sqrt{-1}$; on obtient le second membre de la seconde équation. De-là, on a été appellé à présenter sin. z sous la forme exponentielle imaginaire, $\sin. z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

De-là; $\text{tang.}\, z = \frac{1}{\sqrt{-1}}, \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}$; et $t\sqrt{-1} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}$.

Donc ; $e^{z\sqrt{-1}} : e^{-z\sqrt{-1}} = 1 + t\sqrt{-1} : 1 - t\sqrt{-1}$

$$e^{2z\sqrt{-1}} : 1 = 1 + t\sqrt{-1} : 1 - t\sqrt{-1};$$

$$e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}}; \quad 2z\sqrt{-1} = \log. \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}}.$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}}.$$

Cette formule auroit pu aussi être déduite des deux expressions

$$\tfrac{1}{2} \log. \frac{1+v}{1-v} = v + \tfrac{1}{3} v^3 + \tfrac{1}{5} v^5 + \tfrac{1}{7} v^7 + \tfrac{1}{9} v^9 + \ldots.$$

$$z = t - \tfrac{1}{3} t^3 + \tfrac{1}{5} t^5 - \tfrac{1}{7} t^7 + \tfrac{1}{9} t^9 - \ldots\ldots$$